MỘT KHÓA HỌC VỀ
TỔ HỢP

(A COURSE IN COMBINATORICS)

J. H. van Lint

Technical University of Eindhoven

R. M. Wilson

California Institute of Technology

Người dịch: Nguyễn Quang Tân

Chương 1

ĐỒ THỊ

Một đồ thị G bao gồm một tập các đỉnh V (hoặc $V(G)$) , một tập các cạnh E (hoặc $E(G)$), và một ánh xạ cho tướng ứng mỗi cạnh $e \in E(G)$ với một cặp không sắp thứ tự các đỉnh x, y gọi là các đầu mút của e. Chúng ta nói rằng một cạnh liên thuộc với các đỉnh nếu nó nối các đỉnh của đó. Chúng ta cho phép $x = y$, trong trường hợp này cạnh được gọi là một khuyên. Một đỉnh được gọi là cô lập khi nó không liên thuộc với cạnh nào.

Thông thường một đồ thị được biểu diễn bởi một hình vẽ trong đó chúng ta biểu diễn mỗi đỉnh bởi một điểm trên mặt phẳng và mỗi cạnh bởi một đoạn thẳng hoặc một cung nối một cặp điểm. Ví dụ một mạng lưới đường bộ giữa các thành phố. Một đồ thị được gọi là phẳng nếu nó có thể vẽ được trên một mặt phẳng mà không có 2 cạnh nào cắt nhau. Chủ đề về tính phẳng sẽ được đề cập đến trong Chương 33; chúng ta sẽ đề cập đến đồ thị thuần túy tổ hợp để biểu diễn.

cạnh	đầu mút
a	x, z
b	y, w
c	x, z
d	z, w
e	z, w
f	x, y
g	z, w

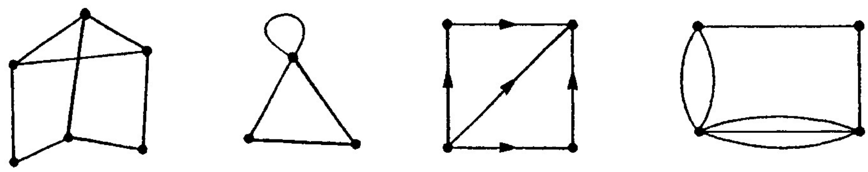
Hình 1.1: Đồ thị được mô tả bởi bảng

Hình 1.1 là một đồ thị được mô tả bởi một bảng liệt kê các đỉnh của các cạnh. Đồ thị này có tập các đỉnh là $V = \{x, y, z, w\}$ và các cạnh $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$; một hình vẽ của đồ thị này có thể được tìm thấy ở hình 1.2.

Một đồ thị là đơn nếu nó không có khuyên và không có 2 cạnh nào có cùng cặp đỉnh. Hai cạnh không phải là khuyên được gọi là song song khi chúng có cùng các đầu mút; đồ thị chứa các cạnh song song gọi là đa đồ thị.

Nếu một sắp thứ tự được cho tương ứng với một cạnh, chúng ta có đồ thị có hướng. Trong hình vẽ của đồ thị có hướng, chúng ta sử dụng một đường có hướng từ đỉnh thứ nhất tới đỉnh thứ hai. Đối với đồ thị đơn có hướng, thì không được có khuyên và không cạnh phân biệt không được có cùng đầu mút là một cặp sắp thứ tự.

Khi chúng ta đề cập đến đồ thị đơn, để thuận tiện ta thường đồng nhất các cạnh với các cặp đỉnh không sắp thứ tự mà chúng nối lại; như vậy cạnh nối x và y có thể được gọi là $\{x, y\}$. Tương tự, các cạnh của một đồ thị đơn có hướng có thể được đồng nhất bởi một cặp sắp thứ tự các đỉnh phân biệt (x, y).



(i) đồ thị (ii) đồ thị có khuyên (iii) đồ thị có hướng (iv) đa đồ thị

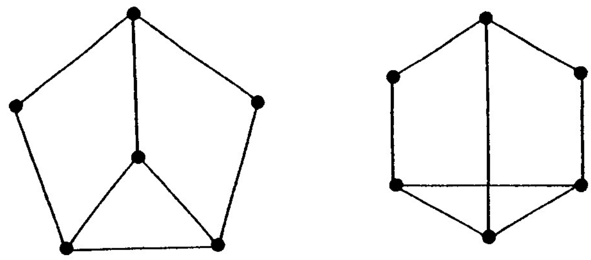
Hình 1.2: Các loại đồ thị

Có nhiều cách để vẽ cùng một đồ thị. Ví dụ, hai đồ thị trong hình 1.3 là một.

Chúng tôi làm cho điều này chính xác hơn, nhưng để tránh định nghĩa kỹ thuật không cần thiết vào thời điểm này, chúng ta hãy giả sử rằng tất cả các đồ thị vô hướng là và đơn cho hai định nghĩa tiếp theo.

Chúng ta nói hai đồ thị là đẳng cấu nếu có một sự tương ứng một - một giữa các tập hợp các đỉnh sao cho nếu hai đỉnh được nối bởi một cạnh trong một đồ thị, thì các đỉnh tương ứng cũng được nối bởi một cạnh trong đồ thị khác. Để chứng tỏ rằng hai đồ thị trong hình 1.3 là như nhau, hãy tìm đánh số phù hợp của các đỉnh trong cả hai đồ thị (sử dụng 1,2,3,4,5,6) và để nhận thấy rằng tập hợp các cạnh là cùng một tập các cặp sắp thứ tự.

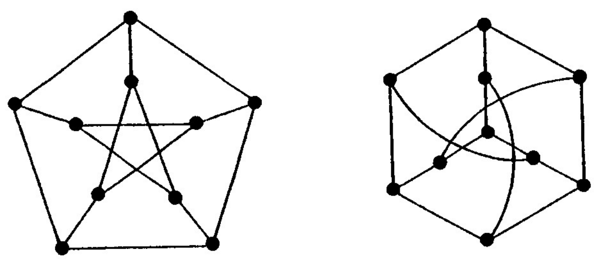
Một hoán vị σ của tập hợp các đỉnh của một đồ thị G với tính chất $\{a, b\}$ là một cạnh nếu và chỉ nếu $\{\sigma(a), \sigma(b)\}$ là một cạnh, được gọi là một tự đẳng cấu của G.



Hình 1.3: Hai đồ thị đẳng cấu

Bài toán 1A. (i) Chứng minh rằng các hình vẽ trong hình. 1.4 biểu diễn cùng một đồ thị (các đồ thị đẳng cấu).

(ii) Tìm nhóm các tự đẳng cấu của đồ thị trong hình 1.4. Lưu ý: Không có một cách nhanh hoặc dễ dàng để làm điều này trừ khi bạn may mắn; bạn sẽ phải thử.



Hình 1.4:

Đồ thị đầy đủ K_n trên n đỉnh là một đồ thị đơn có tất cả $\binom{n}{2}$ cạnh có thể.

Hai đỉnh a và b của một đồ thị G gọi là liền kề nhau nếu chúng phân biệt và được nối bởi một cạnh. Chúng ta sẽ sử dụng kí hiệu $\Gamma(x)$ để kí hiệu tập hợp tất cả các đỉnh liền kề với đỉnh cho trước x; các đỉnh này cũng được gọi là lân cận của x.

Số cạnh liên thuộc với đỉnh x được gọi là bậc hoặc hóa trị của x. Khuyên được coi là đóng góp 2 đến hóa trị, như những hình ảnh chúng ta vẽ gợi ý. Nếu tất cả các đỉnh của một đồ thị có cùng bậc thì đồ thị được gọi là đều. Một trong những công cụ quan trọng trong tổ hợp là phương pháp đếm các vật nhất định theo hai cách khác nhau. Nó là cũng là một thực tế được đã biết đến, nếu một người làm không có lỗi thì hai câu trả lời là giống nhau. Chúng tôi cung cấp một ví dụ cơ bản đầu tiên. Một đồ thị là hữu hạn khi cả hai tập hợp $E(G)$ và $V(G)$ là tập hợp hữu hạn. Chúng tôi sẽ chủ yếu quan tâm đến đồ thị hữu hạn, vì vậy mà có thể đôi khi chúng tôi quên xác định điều kiện này như là một giả thuyết trong một số khẳng định.

Định lý 1.1. *Một đồ thị hữu hạn G có một số chẵn các đỉnh có bậc lẻ.*

Chứng minh. Xét một bảng liệt kê các đầu mút của các cạnh, như hình một 1.1. Số mục trong cột bên phải của bảng là hai lần số cạnh. Mặt khác, bậc của một đỉnh x theo định nghĩa, số lần nó xuất hiện trong bảng. Vì vậy, số mục trong cột bên phải là

$$\sum_{x \in V(G)} \deg(x) = 2|E(G)|. \tag{1.1}$$

Khẳng định được suy ra trực tiếp từ điều này. □

Phương trình (1.1) đơn giản nhưng quan trọng. Nó có thể được gọi là 'định lý đầu tiên của lý thuyết đồ thị', và định lý 1.1 là một hệ quả của nó.

Một đồ thị con của một đồ thị G là một đồ thị H mà $V(H) \subset V(G)$, $E(H) \subset E(G)$, và các đầu mút của một cạnh $e \in E(H)$ cũng giống các đầu của nó trong G. H là một đồ thị con mở rộng nếu $V(H) = V(G)$. Đồ thị con của G cảm sinh bởi một tập con S các đỉnh của G là một đồ thị con mà mà tập các đỉnh của nó chính là S và các cạnh của nó là tất cả các cạnh của G có đầu mút nằm trong

S.

Một lối đi trong đồ một đồ thị G bao gồm một dãy xen kẽ các đỉnh x_i không cần thiết phân biệt và các cạnh e_i

$$x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, x_{k-1}, e_k, x_k$$

mà đầu mút của e_i là x_{i-1} và x_i, $i = 1, 2, \dots, k$. Một lối đi như vậy có độ dài là k. Nếu một đồ thị là đơn, một lối đi được xác định dãy các đỉnh của nó, hai phần tử bất kì trong đó là liền kề.

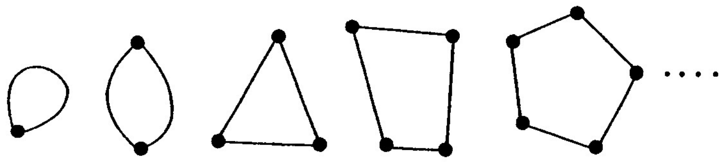
Nếu bộ các cạnh $e_1, \dots, e_k$ là phân biệt, thì lối đi được gọi là một đường đi từ x_0 đến x_k. Nếu $x_0 = x_k$ thì lối đi (đường đi) gọi là đóng. Một đường đi đơn là một đường đi mà bộ các đỉnh $x_0, x_1, \dots, x_k$ cũng phân biệt, chúng ta nói chúng ta có một đường đi đóng đơn khi $k \geq 1$ và bộ tất cả các đỉnh là phần biệt ngoại trừ $x_0 = x_k$.

Nếu luôn có một đường đi từ x đến y với mọi đỉnh x, y của G, thì G gọi là liên thông. Nếu không G bao gồm một số thành phần liên thông. Sẽ là thuận tiện nếu coi đồ thị rỗng với không đỉnh và không cạnh là không liên thông.

Bài toán 1B. Giả sử G là một đồ thị đơn trên 10 đỉnh mà không liên thông. Chứng minh rằng G có nhiều nhất 36 cạnh. Dấu bằng có thể xảy ra không?

Độ dài của lối đi ngắn nhất từ a đến b, nếu có, được gọi là khoảng cách $d(a, b)$ giữa các đỉnh. Một đường đi ngắn nhất như vậy luôn là một đường đi đơn.

Ví dụ 1.1. Một đồ thị được biết đến nhiều là đồ thị có tập đỉnh là các nhà toán học trên thế giới. Hai đỉnh là kề nhau nếu và chỉ nếu họ cùng xuất bản một bài báo. Khoảng cách trong đồ thị này, từ một nhà toán học đến đỉnh P. Erdos được gọi là số P. Erdos của người đó.



Hình 1.5:

Một đa giác là một đồ thị của một đường đơn đóng, chính xác hơn nó được định nghĩa là một đồ thị liên thông hữu hạn đều bậc 2.

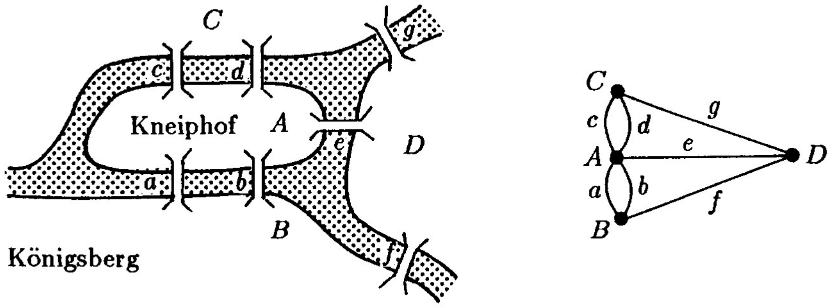
Có một đẳng cấu chính xác từ một đa giác P_n với n đỉnh (thường gọi là $n -$ giác) với mỗi số nguyên dương n. Dãy các đa giác được hiển thị trong hình 1.5

Một đồ thị liên thông chứa đường đi đóng đơn, tương ứng không chứa đa giác là một đồ thị con, được gọi là một cây.

Bài toán 1C. Chứng tỏ rằng một đồ thị liên thông có n đỉnh là một cây nếu và chỉ nếu nó có $n - 1$ cạnh.

Bài toán 1D. Một đồ thị hai phần đầy đủ $K_{n,m}$ có $n + m$ đỉnh $a_1, \ldots, a_n$ và $b_1, \ldots, b_m$ và có tất cả cạnh là mn cạnh $\{a_i, b_j\}$. Chứng tỏ rằng $K_{3,3}$ không phẳng.

Không giới thiệu về lý thuyết đồ thị có thể bỏ qua bài toán về các cây cầu ở Konigsberg (trước đây là một thành phố ở nước Phổ). Sông Pregel chảy qua thành phố này và chia nó thành hai phần. Trên sông là đảo Kneiphof. Có bảy cây cầu kết nối khác nhau phần của thành phố như trong sơ đồ hình 1.6. Trong



Hình 1.6: Bài toán các cây cầu ở Konigsberg

một bài báo được viết năm 1736 bởi L. Euler (được coi là bài báo đầu tiên trên lý thuyết đồ thị) các tác giả khẳng định rằng câu hỏi dưới đây là coi là rất khó: Có thể thực hiện một lối đi qua thành phố, trở về điểm xuất phát mà đi qua mỗi cầu chính xác một lần? Bài viết này đã dẫn đến việc định nghĩa sau đây. Một đường đi khép kín trong một đồ thị đi qua mỗi cạnh một lần được gọi là chu trình Euler và một đồ thị có một con đường đi như vậy được gọi là đồ thị Euler.

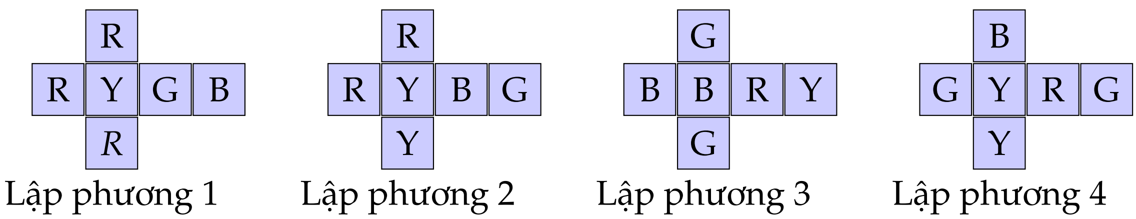
Định lý 1.2. *Một đồ thị hữu hạn G không có đỉnh cô lập (nhưng có thể với nhiều cạnh) là Euler khi và chỉ khi nó liên thông và mỗi đỉnh có bậc chẵn.*

Chứng minh. G rõ ràng phải liên thông. Vì một đường đi vào một đỉnh bằng một cạnh và đi ra bằng một cạnh khác, nên tất các bậc phải là số chẵn. Để chứng tỏ điều kiện này là đủ, chúng ta khởi đầu với một đỉnh x và bắt đầu tạo một tạo một đường đi. Chúng ta phải đi liên tục và không được sử dụng một cạnh 2 lần, cho đến khi chúng ta không thể đi thêm được nữa. Vì mọi đỉnh đều có bậc chẵn, nên điều này chỉ xảy ra khi chúng ta quay trở lại x và tất cả các cạnh xuất phát từ x đã được sử dụng. Nếu còn có cạnh không được sử dụng, chúng ta xét đồ thị con tạo bởi các cạnh này. Chúng ta sử dụng quy trình tương tự trên đồ thị con và tạo ra một đường đóng thứ hai. Nếu chúng ta bắt đầu đường đi thứ hai tại một điểm xuất hiện trên đường thứ nhất, thì hai đường đi có thể kết hợp thành một đường đi đóng dài hơn từ x đến x. Do đó đường đi dài nhất trong các đường này phải sử dụng tất cả các cạnh. □

Bài toán về các cây cầu của Königsberg được mô tả trong hình vẽ 1.6. Không có đỉnh nào có bậc chẵn, do đó không có chu trình Euler.

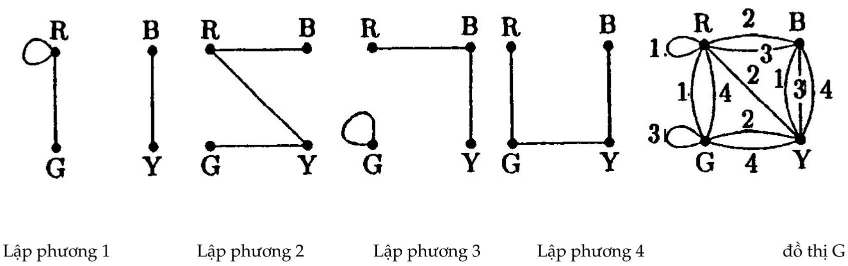
Có thể xem xét bài toán tương tự trong đồ thị có hướng và điều kiện đủ cho một chu trình Euler có hướng là đồ thị liên thông, mỗi đỉnh 'bậc vào' bằng 'bậc ra'.

Ví dụ 1.2. Một trò giải đố với tên gọi Instant Insanity liên quan đến bốn hình lập phương với các mặt màu đỏ (red), xanh (blue), xanh lá cây (green) và vàng (yellow) sao cho mỗi hình lập phương có ít nhất một mặt mỗi màu. Bài toán yêu cầu tạo một cách sắp xếp những hình lập phương này sao cho tất cả 4 màu xuất hiện trên mỗi mặt trong bốn mặt. Trong hình 1.7 chúng ta mô tả 4 hình lập phương thỏa mãn yêu cầu trong dạng phẳng.



Hình 1.7: Giải đố Instant Insanity

Việc thử hết các trường hợp không phải là một ý tưởng hay. Cách tiếp cận có hệ thống như dưới đây. Thông tin cần thiết về các khối lập phương được cho bởi bốn đồ thị trong hình 1.8. Một cạnh liên thuộc với hai màu kề nhau

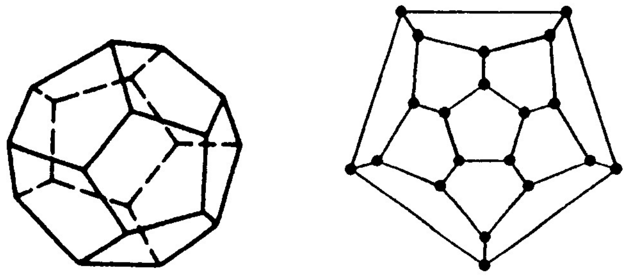


Hình 1.8: Đồ thị của Instant Insanity

xuất hiện trên các mặt đối diện của hình lập phương. Chúng ta thu được đồ thị G bằng cách chồng tất cả bốn đồ thị và đánh số cạnh dựa theo các đồ thị ban đầu. Không khó để thấy rằng chúng ta cần tìm trong G hai đồ thị con đều bậc 2, với các cạnh được đánh số 1,2,3,4 và chúng không có cạnh chung. Một đồ thị con nói cho chúng ta biết những cặp màu sắc sắp xếp trên cạnh trái và phải của sau khi chồng bốn lập phương lại. Đồ thị con còn lại mô tả các màu sắc trên mặt trước và mặt sau. Tất nhiên, rất dễ dàng để quay các hình lập phương để màu sắc ở nơi mà chúng ta mong muốn. Điểm mấu chốt của ví dụ này là chúng ta chỉ mất một phút để tìm hai đồ thị con được mô tả như treen. Trong ví dụ này lời giải là duy nhất.

Chúng ta đề cập đến khái niệm tương tự với chu trình Euler nhưng thực tế hoàn toàn khác biệt. Một chu trình Hamilton trong một đồ thị G là một đường đi đóng đơn mà đi qua tất cả đỉnh đúng một lần. Một đồ thị chứa một chu trình Hamilton nếu và chỉ nếu nó có một đa giác như là một đồ thị con mở rộng. Vào giữa thế kỉ 19, ngài William Rowan Hamilton cố gắng phổ biến việc tìm một đường đi đóng trong đồ thị của hình mười hai mặt (Hình 1.9).

Đồ thị trong hình 1.4 được gọi là đồ thị Petersen và một lí do mà nó nổi tiếng là bởi vì nó không là Hamilton; nó chứa n-giác nếu $n = 5, 6, 7, 8, 9$, và



Hình 1.9: Hình mười hai mặt

không chứa khi $n = 7$ hoặc $n = 10$.

Theo định lý 1.2, dễ dàng để kiểm tra một đồ thị có chứa chu trình Euler. Một máy tính có thể dễ dàng được lập trình để kiểm tra các bậc của một đồ thị là chẵn hay không và đồ thị có liên thông hay không, và thậm chí là tạo ra một chu trình Euler khi nó tồn tại. Trái ngược với điều này, bài toán xác định một đồ thị bất kì có chứa một chu trình Hamilton có thể là 'nan giải'. Chính xác hơn, nó đã được chứng minh là $NP-$ đầy đủ - xem Garey và Johnson (1979).

Bài toán 1E. Cho $A_1, \ldots, A_n$ là n tập con phân biệt của *n-tập* $N = \{1, \ldots, n\}$. Chứng minh rằng có một phần tử $x \in N$ sao cho các tập $A_i \backslash \{x\}, 1 \leq i \leq n$, đều phân biệt. Để làm điều này, tạo một đồ thị G trên các đỉnh A_i với một cạnh là có 'màu' giữa A_i và A_j nếu và chỉ nếu hiệu đối xứng của A_i và A_j là $\{x\}$. Xét các màu xuất hiện trên các cạnh của một đa giác. Chứng tỏ rằng có thể xóa các cạnh từ G theo cách không còn lại đa giác nào và số màu khác nhau còn lại là bằng nhau. Sau đó sử dụng bài tập 1C.

Bài toán 1F. Chu vi của một đồ thị là độ dài đa giác nhỏ nhất trong đồ thị. Cho G là một đồ thị với chu vi 5 mà tất cả các đỉnh có bậc $\geq d$. Chứng minh rằng G có ít nhất $d^2 + 1$ đỉnh. Đẳng thức có thể xảy ra không?

Bài toán 1G. Chứng minh rằng một đồ thị đơn hữu hạn với nhiều hơn một đỉnh, có ít nhất hai đỉnh có cùng bậc.

Bài toán 1H. Một đồ thị trên tập các đỉnh $\{1, 2, \ldots, n\}$ thường được mô tả bởi một mà trận A cỡ n, trong đó a_{ij} và a_{ji} bằng số cạnh với đầu mút i và j. Giải thích ý nghĩa tổ hợp các phần tử trong ma trận A^2?

Bài toán 1I. Cho $Q := \{1, 2, \ldots, q\}$. Cho G là đồ thị mà các phần tử của Q^n là các đỉnh và một cạnh giữa $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nếu và chỉ nếu $a_i \neq b_i$ xảy ra với duy nhất một giá trị i. Chứng tỏ rằng G là Hamilton.

Bài toán 1J. Cho G là một ma trận đơn có n đỉnh ($n > 3$) và không có đỉnh nào có bậc bằng $n - 1$. Giả sử rằng bất kì hai đỉnh nào của G cũng có duy nhất một đỉnh nối cả hai.

(i) Nếu x và y không liền kề, chứng minh rằng chúng có cùng bậc.

(ii) Chứng minh rằng G là một đồ thị đều.

Chú ý.

Paul Erdos (1913-1996) có lẽ là nhà toán học có nhiều tác phẩm nhất thể kỉ 20 với hơn 1400 bài báo đã được xuất bản. Đóng góp của ông cho tổ hợp, lý thuyết số, lý thuyết tập hợp, vv... bao gồm nhiều kết quả quan trọng. Ông đã hợp tác với nhiều nhà toán học trên thế giới, tất cả họ tự hào rằng có Erdos - số bằng 1, trong số đó có các tác giả của cuốn sách này, xem J.W.Grossman (1997).

Leonhard Euler (1707 -1783) là một nhà toán học Thụy Sĩ đã dành phần lớn cuộc đời mình ở St. Petersburg. Ông là nhà toán học có nhiều tác phẩm nhất của mọi thời đại. Thậm chí sau khi bị mù vào năm 1766, công việc của ông vẫn tiếp tục với cùng tốc độ. Trong năm 1986, diễn ra lễ kỷ niệm lần thứ 250 sinh nhật của lý thuyết đồ thị dựa trên bài báo của Euler về bài toán các cây cầu ở Königsberg . Königsberg bây giờ là thành phố Kaliningrad ở Nga.

Để giới thiệu cơ bản lý thuyết đồ thị, chúng tôi khuyến cáo bạn tham khảo RJ Wilson (1979), và JJ Watkins và RJ Wilson (1990).

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) là một nhà toán học người Ailen. Ông được coi là một thiên tài. Ông biết 13 ngôn ngữ ở 12 tuổi và được bổ nhiệm làm giáo sư thiên văn học tại Trinity College Dublin vào năm 22 tuổi (trước khi hoàn tất văn bằng của mình). Công việc chủ yếu của ông là trong vật lý toán học.

Tài liệu tham khảo

- M. Garey and D. S. Johnson (1979), *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-completeness,* W. H. Freeman and Co.
- J. W. Grossman (1997), Paul Erdos: The Master of Collaboration, pp. 467–475 in *The Mathematics of Paul Erdos,* R. L. Graham and J. Nesetril (eds.), Springer-Verlag.
- J. J. Watkins and R. J. Wilson (1990), *Graphs (An Introductory Approach)*, J. Wiley and Sons.
- R. J. Wilson (1979), *Introduction to Graph Theory,* Longman.

Chương 2

CÂY

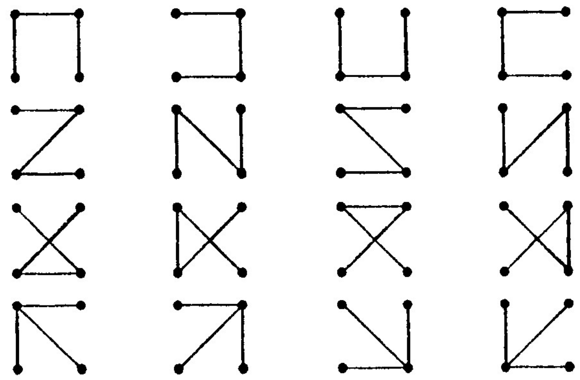
Chúng ta đến với định lý không dễ dàng đầu tiên. Nó là của A. Cayley (1889). Chúng tôi sẽ cung cấp ba chứng minh khác nhau ở đây. Hai chứng minh nữa sẽ nằm ở các chương sau, xem Ví dụ 14.14 và Ví dụ 38.2. Hai chứng minh đầu minh họa một phương pháp được sử dụng rất thường xuyên trong tổ hợp. Để đếm các đối tượng mà dường như là khó đếm, người ta sẽ tìm một song ánh vào một tập các đối tượng khác có thể xác định lực lượng dễ dàng hơn.

Định lý 2.1. *Có n^{n-2} cây khác nhau được "dán nhãn" trên n đỉnh.*

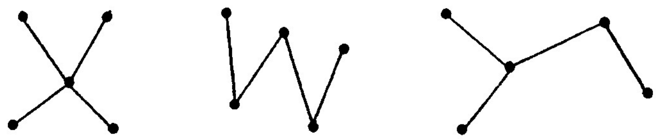
Thuật ngữ dán nhãn nhấn mạnh rằng chúng ta không đồng nhất các đồ thị đẳng cấu. Chúng ta phải cố định tập hợp các đỉnh, và hai cây được tính là một nếu và chỉ nếu chúng có cùng cặp đỉnh kề nhau. Một cây mở rộng của một đồ thị liên thông G là một đồ thị con mở rộng của G mà nó là một cây.

Định lý có thể phát biểu là: Đồ thị đầy đủ K_n có n^{n-2} cây mở rộng.

Ví dụ 2.1. Đây là là 16 cây được dán nhãn trên 4 đỉnh.



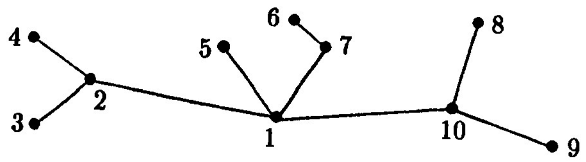
Ví dụ 2.2. Đây là các cây không đẳng cấu trên 5 đỉnh: Số cây mở rộng trong



K_5 đẳng cấu với một cây T cụ thể trên 5 đỉnh là 5! chia hết cho bậc nhóm tự đẳng cấu của T (tại sao). Nên có $5!/2 = 60$ cây đẳng cấu với một trong hai cây khác, trong tổng số 125 cây mở rộng.

Bài toán 2A. Tìm sáu cây không đẳng cấu trên 6 đỉnh và tính số cây mở rộng phân biệt trong K_6 đẳng cấu với một trong 6 cây nói trên.

Trước khi bắt đầu chứng minh, chúng ta tiến hành các quan sát dưới đây. (Có thể độc giả đã chú ý đến những điều này khi giải bài tập 1C). Thứ nhất, mỗi cây với $n \geq 2$ đỉnh có ít nhất hai đỉnh đơn (đỉnh bậc 1). Điều này có được ngay, ví dụ, từ Bài tập 1C và phương trình (1.1): tổng của các bậc $d_1, d_2, \ldots, d_n$, với $d_i \geq 1$, bằng $2n - 2$. Thứ hai, nếu có một đỉnh đơn và cạnh liên thuộc của nó được xóa đi từ một cây, thì đồ thị thu được vẫn là một cây. Cuối cùng, với một cây T, nếu chúng ta thêm một đỉnh mới x và một cạnh mới nối x với bất kỳ đỉnh nào của T thì đồ thị mới cũng là một cây.



Hình 2.1:

Chứng minh 1. Chứng minh đầu tiên mà chúng tôi giới thiệu thuộc về H. Prüfer (1918), sử dụng một thuật toán mà nó mà nó cho tương ứng một cây T bất kì với một cái 'tên' $\mathcal{P}(T)$ (gọi là mã Prüfer) đặc trưng cho cây.

Trong các đỉnh của K_n, ta lấy tập sắp thứ tự $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Cho một cây mở rộng T trong K_n, ta đặt $T_1 = T$ và sinh ra một dãy các cây $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ và hai dãy các đỉnh sau đây: Cho cây T_i với $n - i + 1$ đỉnh, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, đặt x_i là đỉnh đơn nhỏ nhất của T_i và xóa x_i và các cạnh liên thuộc $\{x_i, y_i\}$ từ T_i thu được cây T_{i+1} trên $n - i$ đỉnh. Tên của T là

$$\mathcal{P}(T) = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}$$

Chúng ta khẳng định rằng ánh xạ $\mathcal{P}$ từ tập tất cả các cây mở rộng trong K_n tới tập V^{n-2} tập hợp tất các tên có thể có, là một đơn ánh và toàn ánh. Điều này sẽ chứng minh rằng số các cây mở rọng trong K_n là n^{n-2}.

Với cây trong hình 2.1, trong đó $n = 10$, chúng ta có $(x_1, y_1) = (3, 2), (x_2, y_2) = (4, 2), (x_3, y_3) = (4, 2), (x_3, y_3) = (2, 1), \ldots, (x_9, y_9) = (9, 10)$; những cạnh này là các cột của ma trận dưới đây:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & 7 & 1 & 8 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 7 & 1 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

Nên $\mathcal{P}(T) = (2, 2, 1, 1, 7, 1, 10, 10, 10)$. Không bao gồm $y_9 = 10$.

Để hiểu tại sao $\mathcal{P}$ là một song ánh, trước hết chúng ta chú ý một vài thực tế đơn giản về các x_i và y_i. Thứ nhất y_{n-1} luôn luôn bằng n. Bởi vì mọi cây (với ít nhất hai đỉnh) có ít nhất hai đỉnh đơn nên đỉnh n sẽ không bao giờ là đỉnh đơn nhỏ nhất. Thứ hai, $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}$ và n là các đỉnh của cây T_k. Thứ ba, $\{x_i, y_i\}, k \leq i \leq n-1$, là tất cả các cạnh của T_k theo một thứ tự nào đó.

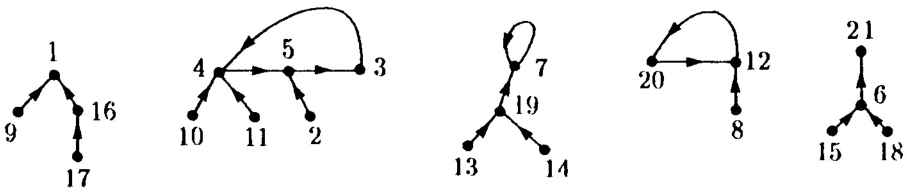
Số lần một đỉnh v xuất hiện trong $y_1, y_2, \dots, y_{n-2}$ là $\deg_T(v) - 1$. Đó là bởi vì v xuất hiện $\deg_T(v)$ lần trong các cạnh $\{x_i, y_i\}$, với $1 \leq i \leq n-1$, và đúng một lần trong $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}$. Tương tự, số lần một đỉnh v của T_k xuất hiện trong $y_k, y_{k+1}, \dots, y_{n-2}$ nhỏ hơn bậc của nó trong cây T_k một đơn vị. Đặc biệt, các đỉnh đơn của T_k là các phần tử của nó trong V và không nằm trong

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\} \cup \{y_k, y_{k+1}, \dots, y_{n-1}\},$$

và điều này nghĩa là x_k, đỉnh đơn nhỏ nhất của T_k, là phần tử nhỏ nhất của $\{1, 2, \dots, n\}$ mà không nằm trong tập nói trên. Đặc biệt x_1 là phần tử nhỏ nhất của V không nằm trong tên $\mathcal{P}(T)$, và chúng ta có thể xác định x_k duy nhất từ $\mathcal{P}(T)$ và $x_1, \dots, x_{k-1}$. □

Bài toán 2B. Có bao nhiêu cây T trên tập các đỉnh $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ mà các đỉnh 2 và 3 có bậc 3, đỉnh 5 có bậc 2, và các bậc khác có bậc 1? Không vẽ hình nhưng xét tất cả các mã Prüfer có thể có trên các cây này.

Chứng minh 2. Chúng ta sẽ đưa ra một chứng minh khác, lại sử dụng một thuật toán ngược. Xét bất kì ánh xạ f từ $\{2, 3, \ldots, n-1\}$ đến $\{1, 2, \ldots, n\}$. Có n^{n-2} ánh xạ f như thế. Xây dựng một đồ thị có hướng D trên các đỉnh 1 đến n bằng các định nghĩa $(i, f(i)), i = 2, \ldots, n-1$, là các cạnh. Hình 2.2 đưa ra một ví dụ với $n = 21$. D bao gồm hai cây 'bắt rễ' từ 1 và n và một số

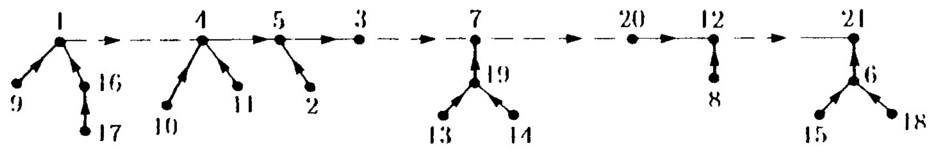


Hình 2.2:

(gọi là k) các chu trình (đa giác có hướng) mà các cây được đính vào. (Cây có hướng mà tất cả các cạnh hướng vào một đỉnh, gọi là gốc, được gọi là arborescences). Những chu trình này nằm trong hình 2.2, trong đó đỉnh ngoài cùng bên phải của đỉnh thứ i được kí hiệu là r_i, là phần tử nhỏ nhất của nó (và l_i là đỉnh bên tay trái). Các chu trình được xếp thứ tự theo điều kiện $r_1 < r_2 < \cdots < r_k$. Với D chúng ta kết nối các cây thu được bằng cách thêm vào các cạnh $\{1, l_1\}, \{r_1, l_2\}, \ldots, \{r_{k-1}, l_k\}, \{r_k, n\}$ và xóa đi các cạnh $\{r_i, l_i\}$ như trong hình 2.3.

Nếu cây trong hình 2.3 được cho sẵn, xét một đường đi từ 1 đến n (=21). Đặt $r_0 := 1$. Định nghĩa r_1 là số nhỏ nhất trên đường đi này (ngoại trừ r_0=1) và tổng quát r_i là số nhỏ nhất trên đường đi từ r_{i-1} đến n. Dễ dàng thấy rằng chúng tôi đã khôi phục được lại ánh xạ f theo cách này. □

Tổng quát hóa của chứng minh này được tìm thấy trong Egecioglu và Remmel (1986).



Hình 2.3:

Bài toán 2C. Cho G là một đồ thị định hướng với các đỉnh $x_1, \ldots, x_n$ chứa một chu trình Euler có hướng trong nó. Một arborescence mở rộng với gốc x_i là một cây mở rộng T của G, với gốc x_i sao cho với mọi $i \neq j$ luôn tồn tại một đường đi có hướng từ x_j đến x_i trong T. Chứng minh rằng số arborescence mở rộng của G với gốc x_i không phụ thuộc vào i. (Bài này khó; xem gợi ý.)

Chứng minh 3. Bây giờ chúng tôi đưa ra một chứng minh bằng cách đếm vì thấy rằng phương pháp này rất hữu ích. Chúng tôi nhắc lại cho độc giả định nghĩa của một hệ số đa thức. Cho $r_1, \ldots, r_k$ là các số nguyên không âm với tổng n. Thì $\binom{n}{r_1,\ldots,r_k}$ được định nghĩa bởi

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum \binom{n}{r_1, \ldots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_k^{r_k}, \tag{2.1}$$

trong đó tổng được lấy theo tất cả các k-bộ $(r_1, \ldots, r_k)$ có tổng bằng n.

Vì $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = (x_1 + \cdots + x_k)^{n-1}(x_1 + \cdots + x_k)$, ta có

$$\binom{n}{r_1, \ldots, r_k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{r_1, \ldots, r_i - 1, \ldots, r_k}. \tag{2.2}$$

Chúng ta kí hiệu số cây được gắn nhãn với n đỉnh mà có các bậc $d_1, d_2, \ldots, d_n$ bởi $t(n; d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Rõ ràng số này bằng 0 nếu và chỉ nếu có một d_i bằng 0. Giá trị của $t(n; d_1, d_2, \ldots, d_n)$ chỉ phụ thuộc vào đa tập hợp của các số d_i mà không phụ thuộc vào thứ tự của chúng. Không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử rằng $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$, nên $d_n = 1$. Lấy đỉnh v_n ứng với d_n. Nó nối với đỉnh v_i với $d_i \geq 2$, và bất đỉnh nào còn lại cũng là một ứng cử viên. Do đó

$$t(n; d_1, d_2, \ldots, d_n) = \sum_{i=1}^{n-1} t(n-1; d_1, \ldots, d_i - 1, \ldots, d_{n-1}). \tag{2.3}$$

Việc kiểm tra đẳng thức sau với $n = 3$ là tầm thường

$$t(n; d_1, d_2, \ldots, d_n) = \binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1} \tag{2.4}$$

Vì các số ở vế bên trái của đẳng thức (2.4) thỏa mãn quan hệ truy hồi (2.3), còn các số ở bên vế phải thỏa mãn quan hệ truy hồi (2.2), từ đó suy ra bằng quy nạp đẳng thức (2.4) đúng với mọi n. Trong (2.1), chúng ta thay n bởi $n-2$, k bởi n, r_i bởi $d_i - 1$ và x_i bởi 1. Ta thấy

$$n^{n-2} = \sum t(n; d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

□

So sánh (2.4) với Bài toán 2B.

Một cây mở rộng được xây dựng dễ dàng bằng cách bắt đầu từ một đỉnh bất kì, lấy các cạnh tới các đỉnh với khoảng cách bằng 1, thì một cạnh tới mỗi đỉnh với khoảng cách 2, vv... Có nhiều cách xây dựng khác khả thi (ví dụ như bắt đầu bằng G và xóa các cạnh phù hợp).

Một đồ thị không có đồ thị con là đa giác được gọi là là một rừng. Mỗi thành phần $C_1, C_2, \ldots, C_k$ của một rừng G là một cây, nên nếu một rừng với n đỉnh có k thành phần thì nó có

$$(|V(C_1) - 1) + (|V(C_2) - 1) + \cdots + (|V(C_k) - 1) = n - k$$

cạnh.

Một đồ thị có trọng số là một đồ thị G cùng với một hàm số cho tương ứng mỗi số thực $c(e)$ (thường là không âm) với mỗi cạnh e, gọi là độ dài hoặc giá tùy theo ngữ cảnh. Chúng ta hãy sử dụng thuật ngữ 'giá' ở đây. Cho một đồ thị liên thông có trọng số G, định nghĩa giá của một cây mở rộng T của G là

$$c(T) := \sum_{e \in E(T(} c(e).$$

Một đồ thị có thể được biểu diễn là một mạng lưới các thành phố trong đó $c(\{x, y\})$ là giá của việc lắp đặt một đường dây điện thoại nối các thành phố x và y, và rõ ràng tìm một cây mở rộng rẻ nhất trong G là bài toán thực tế quan trọng.

Phương pháp dưới đây thường được gọi là thuật toán tham lam. Trong thực tế, nó chỉ là một trong số các thuật toán có thể được gọi là thuật toán tham lam, trong đó người ta không lên kế hoạch trước nhưng lấy những gì có vẻ là lựa chọn tốt nhất tại mỗi thời điểm và không xem lại. Điều ngạc nhiên là một thủ tục đơn giản như vậy lại thực sự tạo ra một cây mở rộng với giá rẻ nhất, điều này được chứng minh trong Định lý 2.2 dưới đây. Ta gọi một tập S các cạnh của một đồ thị G là độc lập nếu đồ thị con mở rộng với tập cạnh S (kí hiệu G:S) là một rừng.

Thuật toán tham lam. Cho G là một đồ thị có trọng số liên thông với n đỉnh. Tại mỗi thời điểm, chúng ta sẽ có một tập $\{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ của i cạnh độc lập (bắt đầu với $i = 0$),thì $G : \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ có $n - i$ thành phần. Nếu $i < n - 1$, đặt e_{i+1} là một cạnh với các đầu mút nằm trong các thành phần khác nhau của $G : \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ và giá của nó là nhỏ nhất đối với tính chất này. Dừng khi chúng ta đã chọn được $n - 1$ cạnh.

Định lý 2.2. *Với* $e_1, \ldots, e_{n-1}$ *đã được chọn ở trên, cây mở rộng* $T_0 := G : \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$

có tính chất $c(T_0) \leq c(T)$ với bất kì cây mở rộng T.

Chứng minh. Gọi $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ là tập cạnh của một cây T đã được đánh số thì $c(a_1) \leq c(a_2) \leq \cdots \leq c(a_{n-1})$. Chúng ta khẳng định một điều gì đó mạnh hơn $c(T_0) \leq c(T)$ nhiều; cụ thể là, chúng ta khẳng định rằng $c(e_i) \leq c(a_i)$ với mỗi $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Nếu điều này sai thì

$$c(e_k) > c(a_k) \geq c(a_{k-1}) \geq \cdots \geq c(a_1)$$

với một giá trị k. Vì không có cạnh nào trong số các cạnh $a_1, a_2, \ldots, a_k$ được chọn tại thời điểm e_k được chọn nên mỗi cạnh trong k cạnh này có hai đầu mút trong cùng một thành phần $G : \{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\}$. Số thành phần của $G : \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ nhỏ nhất bằng số $n-k+1$ thành phần của $G : \{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\}$ và điều này mâu thuẫn với thực tế là $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ độc lập. □